Adı Soyadı : CEVAP ANAHTARI 19.06.2019

Numara :

LİNEER CEBİR II FİNAL SINAVI SORULARI

SORU 1: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ ve $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ olmak üzere σ, τ için

a) $\sigma^2\tau$ çarpımını hesaplayınız.

b) $\sigma^2\tau$ çarpımını transpozisyonların çarpımı olarak yazınız ve işaretini bulunuz.

SORU 2: V ve W aynı bir $\mathcal{F}$ cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı ve $A: V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. A lineer dönüşümü birebirdir $\Leftrightarrow$ $\alpha \in V$ için $A(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ dır, gösteriniz.

SORU 3:

$$\begin{aligned} 2x + z &= 1 \\ 2x + 4y - z &= 1 \; . \\ -x + 8y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini çözünüz.

SORU 4: IR^3 de $A: IR^3 \to IR^3$

$$(x, y, z) \to A(x, y, z) = (x - y, x + y + z, y + z)$$

lineer dönüşümü verilsin. IR^3 ün sıralı iki bazı $S = \{(1,0,1), (2,1,0), (0,0,1)\}$ ve $T = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ olmak üzere A lineer dönüşümüne bu bazlara göre karşılık gelen $A_{S,T}$ matrisini bulunuz.

SORU 5:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin karakteristik (öz) değerlerini ve karakteristik (öz) vektörlerini bulunuz.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar

Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

1- a) $\sigma^2 \tau = \sigma . \sigma . \tau$ olduğundan

$$\sigma^2 \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ dır.}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 8 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (2,7,6,3)(4,5,8$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \tau = (2,3)(2,6)(2,7)(4,8)(4,5)$$

seklinde transpozisyonların çarpımı olarak elde edilir. Burada transpozisyon sayısı 5 olduğu için

$$s(\sigma^2 \tau) = -1$$

dır.

2- Defterde mevcut.

3.

$$2x + z = 1$$
$$2x + 4y - z = 1$$
$$-x + 8y + 3z = 2$$ lineer denklem sisteminde

$m = 3$ (Denklem Sayısı)

$n = 3$ (Bilinmeyen Sayısı) olmak üzere katsayılar

matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$ olup

$$\det A = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 60 \neq 0$$

bulunur. Bunun anlamı verilen lineer denklem sisteminin çözümleri Cramer metoduyla bulunabilir.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{60} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{60} = \frac{10}{60} =$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}}{60} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

4 _ $S = \{ \underbrace{(1,0,1)}_{=\alpha_1}, \underbrace{(2,1,0)}_{=\alpha_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{=\alpha_3} \}$

$T = \{ \underbrace{(1,1,1)}_{=\beta_1}, \underbrace{(1,1,0)}_{=\beta_2}, \underbrace{(1,0,0)}_{=\beta_3} \}$ bazları için

A lineer dönüşümüne göre

- $A(\alpha_1) = A(1,0,1) = (1-0,\ 1+0+1,\ 0+1)$

$$= (1, 2, 1)$$

$\Rightarrow A(\alpha_1) = (1,2,1) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0)$

$\Rightarrow (1,2,1) = (a+b+c,\ a+b,\ a)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a+b+c &= 1 \\ a+b &= 2 \\ a &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{aligned} b &= 1 \\ c &= -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow A(\alpha_1) = 1\beta_1 + 1\beta_2 + (-1)\beta_3}$$

- $A(\alpha_2) = A(2,1,0) = (1, 3, 1)$

$$\boxed{\Rightarrow A(\alpha_2) = 1\beta_1 + 2\beta_2 + (-2)\beta_3}$$

- $A(\alpha_3) = A(0,0,1) = (0, 1, 1)$

$$\boxed{\Rightarrow A(\alpha_3) = 1 \cdot \beta_1 + 0\beta_2 + (-1)\beta_3}$$

$$A_{S,T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

5- $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$ vektörü için

$A(\vec{\alpha}) = \lambda \vec{\alpha}$ o.ş. $\lambda \in \mathbb{R}$ reel sayılarını arayalım.

$A(\vec{\alpha}) = \lambda \vec{\alpha}$

$\Rightarrow (A - \lambda I_2)\vec{\alpha} = 0$ dır. Burada,

$$\left(\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow \quad (6-\lambda)\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0$$

$$-3\alpha_1 + (-1-\lambda)\alpha_2 = 0 \quad \text{halini dır.}$$

Burada,

$$\det \begin{bmatrix} 6-\lambda & 4 \\ -3 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \text{olmalıdır.}$$

$$\Rightarrow (6-\lambda)(-1-\lambda) + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3$ ve $\lambda_2 = 2$ karakteristik değerleri bulunur. Şimdi bu karakteristik değerlere karşılık gelen karakteristik vektörleri bulalım.

$\underline{\lambda_1 = 3 \text{ için}}$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_1 - 4\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1 = -\frac{4}{3}\alpha_2$ olur. Yani;

$\alpha_2 = 3t$ dersek $\alpha_1 = -4t$ dı[r]

O halde; $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) = (-4t, 3t)$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\underline{\lambda_2 = 2 \text{ için}}$

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ -3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$ olur. Yani;

$\alpha_2 = t$ dersek $\alpha_1 = -t$ dır.

O halde; $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) = (-t, t)$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.